

Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Moment cinétique. Vecteur vitesse angulaire. Centre de masse. Orientation de la barre. Angle-theta. Sinus de phi foifi. Mouvement d'un pendule mathématique. Axe vertical. Vecteur unitaire. Termes du moment d'inertie. Angle phi. Énergie cinétique de rotation. Moment d'inertie. Carré de la longueur. Sinus de theta.



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

page 1/27

Applications - Chapitre 11

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

EPFL

Dr. Sylvain Bréchet

A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

11 / 34

...

notes

résumé

0m 0s



A13
Pendule physique
EPFL

- Un pendule physique est un balancier constitué d'une barre et d'un cylindre de masse totale M . Le pendule oscille autour d'un axe horizontal qui passe par le point O .
- Sachant $\vec{OG} = L \hat{g}$ le vecteur position du centre de masse G , I_O et I_G les moments d'inertie du pendule par rapport aux axes horizontaux parallèles qui passent par les points O et G .
- Théorème d'Huygens-Steiner :

$$I_O = I_G + ML^2$$

- Pour un solide indéformable, contrairement à un point matériel, la tension $\vec{T}$ exercée au point d'attache O n'est pas orientée selon la droite OG qui passe par le centre de masse G (i.e. $\vec{T} \neq \vec{p}$).
- Accélération angulaire :

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgL}{I_O} \sin \theta$$

Ces sous-titres ont été générés automatiquement Passons maintenant aux applications de cours de ce 13e chapitre. Je vais tout de suite annoncer la couleur. On m'entend avec le micro, le son passe. La semaine prochaine, il n'y aura pas d'applications de cours. En revanche, il y aura le matin un cours supplémentaire qui fait le lien entre la mécanique classique et la mécanique antique avec de magnifiques expériences de cours et des informations vitales pour l'examen qui viendront enfin de matinée. Mais l'après-midi, vous aurez l'occasion si vous devez partir pour vous rendre en vacances de Noël ailleurs de déjà prendre un TGV plutôt si besoin est. D'ailleurs, l'examen blanc qui sera donné vendredi sera mis à disposition le soir d'avant et vous pourrez l'imprimer, le faire chez vous ou si vous êtes en déplacement, le faire ailleurs dans des conditions qui ressemblent à celle de l'examen et ses salutes. Voyons donc maintenant les dernières applications de cours, donc celle du chapitre 13. Il y a un type de mouvement qui était une icône de secours, le mouvement d'un pendule mathématique. Je vous ai dit et je vous ai répété qu'on verra plus tard le pendule physique. Le mouvement d'un pendule physique est quelque chose de réaliste, donc un balancier qui se déplace à l'intérieur d'une pendule neuchâteloise ou d'une pendule comptoise par exemple. Ne soyons pas raciste, vous pouvez imaginer une pendule d'origine suisse ou française comme vous le voulez. Donc on va décrire ce mouvement et ce qu'on va constater et vous pouvez le comprendre intuitivement déjà maintenant, c'est que la période de dossieration du pendule physique sera plus grande que la période de dossieration du pendule mathématique. Pourquoi ? Il y a une raison à cela, c'est que dans un pendule mathématique il n'y a pas de changement d'orientation à donner à l'objet qui est un pendule. Alors que pour un pendule on fait changer l'orientation de

notes

résumé

0m 1s



- Un pendule physique est un balancier constitué d'une barre et d'un cylindre de masse totale M . Le pendule oscille autour d'un axe horizontal qui passe par le point O .

- Soient $\vec{OG} = L \hat{g}$ le vecteur position du centre de masse G , I_O et I_G les moments d'inertie du pendule par rapport aux axes horizontaux parallèles qui passent par les points O et G .

- Théorème d'Huygens-Steiner :

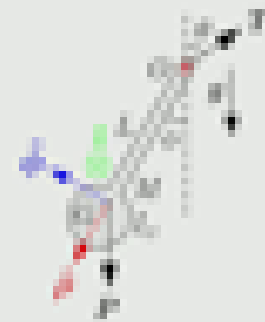
$$I_O = I_G + ML^2 \quad (A.13.1)$$

- Pour un solide indéformable, contrairement à un point matériel, la tension $\vec{T}$ exercée au point d'attache O n'est pas orientée selon la droite OG qui passe par le centre de masse G (i.e. $\vec{T} \neq \vec{r}$).

- Accélération angulaire :

$$\vec{\Omega} =$$

$$(A.13.2)$$



la barre, l'orientation du barreau, d'accord ? Et ce changement d'orientation requiert de l'énergie cinétique de rotation qui va donc manquer à la translation pure du point matériel qu'on avait pour le modèle du pendule mathématique et par conséquent l'accélération sera plus faible, la période sera plus grande, d'accord ? Donc intuitivement c'est ça qu'on aimerait montrer. On verra un deuxième exemple qui est lié au premier, d'une certaine manière. On a vu le pendule conique avec un point matériel, on va revoir le pendule conique avec un solide indéformable, avec une barre qui tourne autour d'un axe vertical. Et alors là l'intérêt de ce problème évidemment, c'est que le moment cinétique ne sera pas parallèle au moment, enfin, oui, le moment cinétique ne sera pas parallèle au vecteur vitesse angulaire et donc on devra tenir compte de l'application Tenseur d'Inertie, d'accord ? Qu'on va évidemment représenter dans la base appropriée. Mais commençons tout de suite par le pendule physique, d'accord ? Donc il faut imaginer une sorte de cylindre, souvent c'est des cylindres en letton, d'accord ? Il faut un ordre qui est fixé ici à un balancier, qu'on va modéliser comme une tige, d'accord ? Pour simplifier les idées, la tige tourne autour d'un axe horizontal fixé à peu près à son sommet et le centre de masse, on va dire qu'il a une longueur L du point d'attache, d'accord ? On va introduire un système d'axe cylindrique avec un vecteur unitaire au chapeau qui est le long du barreau orienté vers le bas. En fait, sur ce petit chapeau, on va le prendre orienté vers la gauche, on suppose que l'angle ϕ augmente depuis la verticale, comme ceci, vers la gauche, d'accord ? Le moment d'inertie globale de ce pendule, de ce balancier, c'est I_G . Peu importe que vos I_G exactement pourraient le calculer, mais ce n'est pas ce qui fait l'intérêt la question ici, d'accord ?

notes

résumé

- Un pendule physique est un balancier constitué d'une barre et d'un cylindre de masse totale M . Le pendule oscille autour d'un axe horizontal qui passe par le point O .

- Soient $\vec{OG} = L \hat{g}$ le vecteur position du centre de masse G , I_O et I_G les moments d'inertie du pendule par rapport aux axes horizontaux parallèles qui passent par les points O et G .

- Théorème d'Huygens-Steiner :

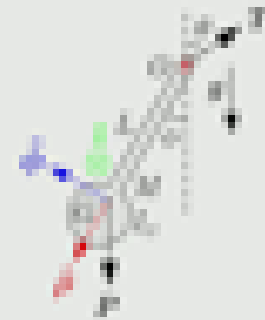
$$I_O = I_G + ML^2 \quad (A.13.1)$$

- Pour un solide indéformable, contrairement à un point matériel, la tension $\vec{T}$ exercée au point d'attache O n'est pas orientée selon la droite OG qui passe par le centre de masse G (i.e. $\vec{T} \neq \vec{r}_G$).

- Accélération angulaire :

$$\vec{\Omega} =$$

$$(A.13.2)$$



On va simplement comprendre le comportement. Il y a deux forces qui s'exercent sur ce pendule. Il y a le poids qui est exercé au centre de masse verticalement vers le bas. On va voir que c'est un point d'attache, d'accord ? Alors si vous regardez le dessin, vous avez peut-être l'impression qu'il y a une erreur. Pourquoi est-ce que la tension n'est pas le long de barre ? Ce n'est pas une erreur, c'est une réalité. Quand on a un point matériel pour des raisons de symétrie, la tension est long du fil. Quand on a un solide indéformable, ce n'est plus nécessairement le cas, d'accord ? La tension n'est pas forcément orienté le long de barre. On verra dans le deuxième exemple avec la barre mince qui tourne autour d'un axe vertical. On va le montrer qu'effectivement,

notes

résumé

la tension qui est appliquée au niveau du point d'attache ne se trouve pas dans le prolongement de la barre. Il faut être un peu patient. Vous aurez la réponse dans quelques instants. Je sais que de voir ça, ça perturbe. On a l'impression qu'on a un angle-fi ici. C'est un angle-theta avec theta qui est différent de phi. Et on va le montrer. Bon. Le vecteur position du centre de masse, le vecteur OG, c'est un vecteur dont la norme vaut la longueur L qui sépare au 2G, qui est orientée dans la direction du vecteur unitaire au chapeau. La première chose à faire, ça va être d'exprimer le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal qui passe par l'origine ici en termes du moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal qui passe par le centre de masse. Et pour ce faire, on a deux axes parallèles. Le premier d'entre eux, celui par rapport au centre de masse, est un axe principal d'inertie. On va donc utiliser le théorème du Genssteiner, qui nous dit que le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal qui passe par l'origine, c'est le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal qui passe par le centre de masse. Et on ajoute comme un moment d'inertie supplémentaire le produit de la masse du pendule fois le carré de la longueur, le carré de la distance, qui sépare les deux points. Maintenant, on a choisi un repère cylindrique avec un vecteur fi chapeau qui est orienté ici vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens horaire. Donc, la vitesse angulaire et sa dérivée temporelle vecteur accélération angulaire sont aussi orientées telle qu'une accélération de la barre vers la gauche et positive. Donc, le vecteur angulaire omega, pour trouver son orientation explicite, on prend la main droite, on la fait tourner vers la gauche et on voit que le pouce rentre dans le plan. Ça, c'est l'orientation du



A13 - Solide indéformable

1777

Forces extérieures :

Pointe : en O'

(A.11.3)

$\vec{P} =$

Reaction : en O

(A.11.4)

$\vec{R} =$

Theoreme du moment cinétique :

$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) =$

$\frac{d}{dt} \vec{L}_O$

ou

selon B :

(A.11.5)

de l'axe fixe

A.11 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

1777

vecteur omega et du vecteur omega. C'est selon z chapeau. Donc, pour omega, on a fi.zchapeau, pour omega.1, on a fi.zchapeau. Ça, c'est pas compliqué. C'est ce qu'il faut faire immédiatement quand vous avez un problème de dynamique du solide indéformable, il faut respecter l'orientation qui est donnée par le choix du système de coordonnée que vous avez choisi. À l'examen, les systèmes de coordonnée vous seront donnés. Donc, l'orientation des vecteurs omega et omega.1 suit naturellement du choix du système de coordonnée. Ça veut pas dire que la composante est positive, ça dépend de la dynamique. Mais pour exprimer omega, il faut choisir l'orientation qui est définie par la paramétrisation, c'est-à-dire par le système de coordonnée.

notes

résumé

A131

Phénomènes physiques

1999

Forces extérieures :

Poids : en O

(A.11.3)

$$\vec{P} = M\vec{g} = M g (\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

Tension : en O

(A.11.4)

$$\vec{T} = -T (\cos(\theta - \phi) \vec{e}_r + \sin(\theta - \phi) \vec{e}_\theta)$$

Théorème du moment cinétique : $\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$ et $\vec{T}_O = m \vec{a}_O$

$$\sum \vec{M}_O^{\vec{F}} =$$

$$=$$

$$= m \vec{a}_O \cdot \vec{r}_O$$

(A.11.5)

Dr. Jacques Bérubé

A131 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

8 / 29

Bon, ce qu'il faut faire maintenant, c'est exprimer les forces extérieures dans le repère qu'on a choisi. Alors, on commence par le poids. On a évidemment MG, G qui est orienté verticalement vers le bas, qu'on va exprimer encore donné cylindrique, c'est-à-dire qu'on aura MG qui multiplie. Le cosinus de phi foirou chapeau moins le sinus de phi foifi chapeau. Pour la tension, c'est un peu plus subtil, pour une fois. Pourquoi ? Parce que l'angle theta que fait le vecteur tension avec la verticale, c'est en général pas le même que l'angle phi qu'on retrouve ici. Pour projeter le long de la barre, l'angle qui intervient ici en rouge, c'est la différence entre les deux. C'est theta moins phi. Donc il faudra qu'on utilise des cosinus et des sinus de theta moins phi. Ensuite, la tension est orientée vers le haut, et le vecteur au chapeau, il est orienté vers le bas. Quand on fera nos projections, la tension est orientée vers la droite, donc on va mettre moitié en évidence, la norme de la tension. Et lorsqu'on fait les projections, le long de la barre et dans la direction orthogonale, on aura donc le long de la barre, le cosinus de theta moins phi, qui va intervenir foirou chapeau, et dans la direction orthogonale, bien sûr, le sinus de theta moins phi foifi chapeau. Dans ce problème, heureusement d'ailleurs, la rotation se fait autour d'un axe, qui est parallèle à un axe principal d'inertie. Ce qui veut dire que le moment cinétique évalué par rapport à haut va être collinéaire au vecteur vitesse angulaire omega. Le facteur de proportionnalité, c'est bien sûr le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par haut. Vous voyez ici, évidemment, comme on a un solide indéformable, le moment d'inertie est une constante.

notes

résumé

7m 7s



A133

Pendule physique

177%

Equation du mouvement :

(4.11.6)

Approximation des petits angles :

(4.11.6) $\Rightarrow$ (4.11.7)

Période :

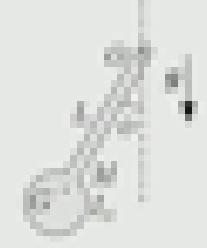
(4.11.8)

Période :

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$

(4.11.9)

La période T du pendule physique est plus longue que celle du pendule mathématique de même longueur l (i.e. $I_P = 0$).



Dr. Fabrice Brionne

A133 : Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

4 / 39

Alors maintenant, on applique le théorème du moment cinétique au niveau de l'origine, au niveau du point haut, pourquoi ? Parce que physiquement, c'est très bien que le pendule tourne autour du point haut. On aurait pu l'appliquer au niveau du centre de masse, mais ce qui se passerait dans ce cas-là, c'est qu'on aurait également besoin du théorème du centre de masse pour s'en sortir, ça serait plus compliqué. Donc autant appliquer directement le théorème du moment cinétique au niveau du point de contact. Donc la somme des moments de force extérieures, il y en a deux, c'est le moment de force liable au poids qui est le vecteur OG qui part donc de l'origine pour pointer sur le point où s'applique le poids. OG, produit vectoriel avec le poids, plus le vecteur issu du point haut qui pointe sur le point d'application de la tension, qui est aussi le point haut, c'est le vecteur haut haut haut haut, comme gg, c'est un vecteur nul, donc cette deuxième contribution est nul. Ceci va être égal à quoi ? À la dérivée temporelle du moment cinétique évalué à l'origine qui est ici. Bon, mon d'inertie est constant, on dérive le vecteur vitesse angulaire, on se retrouve donc avec le moment d'inertie fois l'accélération angulaire. Bon, alors maintenant, le vecteur OG, c'est l'hôchapo, le poids, on vient de le déterminer, c'est mg qui multiplie le cosinus de phi, fois hôchapo, moins le sinus de phi, fois fichapo. La contribution au hôchapo qui est le long de la barre n'apporterait rien au produit vectoriel, et dans le moment de droite, on aura le moment d'inertie, fois l'accélération angulaire qui est phi point point fois z-hôpo. Le produit vectoriel de hôchapo avec fichapo, c'est le produit vectoriel des deux premiers vecteurs unitaires du repère, ça nous donne bien sûr le troisième qui est z. Donc, on va avoir deux termes à gauche et

notes

résumé

9m 13s



- La période T du pendule physique est plus longue que celle du pendule mathématique de même longueur L (i.e. $I_{cm} = 0$).

à droite qui sont proportionnelles à $z\text{-}\hat{h}\hat{o}p\hat{o}$, $z\text{-}\hat{h}\hat{o}p\hat{o}$ qui est le vecteur unitaire horizontal le long de l'axe de rotation. Donc on va se retrouver si on projette selon $z\text{-}\hat{h}\hat{o}p\hat{o}$ avec, pour le moment de force du poids, moins $mg\ l\sin\phi$ qui va être égal à la dérivée temporelle du moment cinétique, qui est le moment d'inertie par rapport à l'origine, multiplié par l'accélération angulaire. Seulement ce moment d'inertie $i\text{-}\hat{h}\hat{o}$, on peut l'exprimer en termes de $I\text{-}G$ qu'on connaît, d'accord, ou qu'on suppose connaître, on aura donc $I\text{-}G$ plus $m\text{-}l^2$, comme on l'a vu en appliquant théorème du Gensteiner, on multiplie par ϕ point point. Alors en général, quand on a une équation comme celle-ci, comme je vous l'ai répété durant tout le semestre, ce qu'on fait, c'est qu'on divise par la masse. Ici, c'est un peu plus compliqué, ce n'est pas la masse, c'est le moment d'inertie. Mais c'est pareil, c'est la même idée, d'accord ? Donc on va diviser par le terme qui est ici, d'accord ? Bon, alors si on fait ça,

résumé

A13 - Pendule physique
177

- Equation du mouvement :
$$\ddot{\phi} + \frac{D_G + mL^2}{D_G + mL^2} \omega^2 \phi = 0 \quad (A.13.6)$$
- Approximation des petits angles : $\sin \phi \approx \phi$

$$(A.13.6) \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (A.13.7)$$
- Période :
$$\omega = \sqrt{\frac{D_G + mL^2}{D_G + mL^2}} \quad (A.13.8)$$
- Période :
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{D_G + mL^2}{D_G + mL^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{D_G}{D_G + mL^2}} \left(2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \right) \quad (A.13.9)$$
- La période T du pendule physique est plus longue que celle du pendule mathématique de même longueur L (i.e. $D_G = 0$).

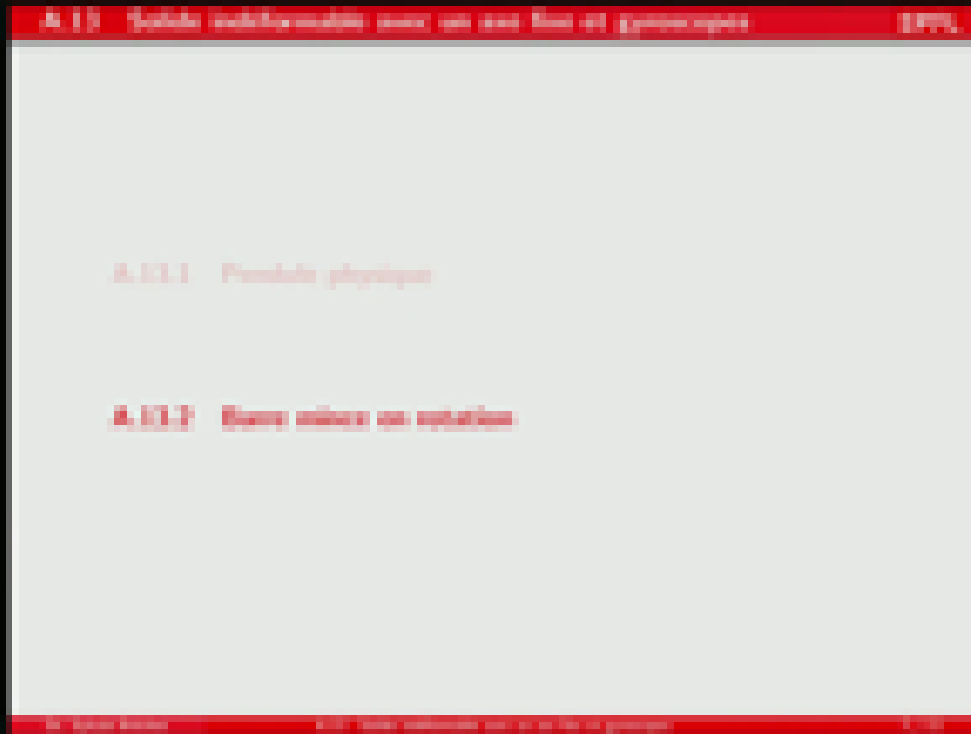
cette équation du mouvement d'oscillation autour de l'axe vertical prend la forme suivante. On se retrouve avec $\phi \ddot{\phi} + mgL$, si au moment d'inertie I_G plus mL^2 , qui multiplie le sinus de ϕ , qui est égal à ϕ . On va considérer la limite des petits angles. Si on a un petit angle d'oscillation, en faisant un développement limité au premier ordre, on sait que le sinus de cet angle est à peu près égal à l'angle. Donc dans la limite des petits angles, qu'est-ce qu'on obtient ? L'équation d'un mouvement harmonique, sans surprise, $\phi \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$. Voilà, ω va être différent du cas du solide, du cas du point matériel. ω , ça sera la racine carrée de mgL divisé par $I_G + mL^2$. D'accord ? Alors ce qui est intéressant, c'est de la remettre un petit peu en forme, cette racine carrée, et surtout de déterminer la période. On connaît très bien la période d'oscillation d'un pendule mathématique, où le point matériel est attaché au bout d'un fil de longueur L . D'accord ? Donc récrivons 2π sur ω , comme 2π fois la racine carrée de $I_G + mL^2$ divisé par mgL . Et là on fait une toute petite remise en forme, en extrayant de cette racine la racine carrée de L sur g . Et alors il va nous rester la racine carrée de $1 + I_G$ sur mL^2 , qui multiplie 2π fois la racine carrée de L sur g . Alors ça c'est un résultat intéressant, pourquoi ?

notes

résumé

12m 7s





Parce que justement, ceci correspond à la période qu'on aurait pour un point matériel suspendu, un fil de longueur l , donc il se trouve au centre de masse du solide indéformable. Et qu'est-ce qu'on voit ? On voit que la période d'oscillation est plus grande. Qu'est-ce qui intervient le pré-facteur qu'on voit ici ? Qu'est-ce qu'on sait sur un moment d'inertie ? C'est le produit d'une masse fois une distance au carré. Donc concrètement dans ce problème, c'est du genre $m-l^2$ fois un facteur. D'accord ? Donc on a un facteur numérique qui vient s'ajouter à un, dont on prend la racine-carrée, ce qui donne quelque chose qui est légèrement supérieur à un. D'accord ? Alors après il faut regarder de manière spécifique en fonction du pendule physique qu'on a pris, de l'objet qu'on veut faire tourner. D'accord ? Mais on va avoir une période d'oscillation qui est légèrement plus longue parce qu'il faut fournir de l'énergie cinétique de rotation pour faire tourner le pendule. D'accord ? Ce n'est pas seulement l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse, c'est pour ça que la période est plus grande. Ceci on va le vérifier expérimentalement. Je crois que c'est sur la caméra 26. Voyons ça. Alors effectivement, le centre de masse de cet objet, je vais vous le démontrer dans quelques instants, se trouve au point qui est là. Il coïncide avec le centre de masse du point matériel qu'on a ici. Alors maintenant on va leur donner au deux un angle d'oscillation qui est suffisamment petit. On va les lâcher de manière synchrone et vous allez voir qu'il se désynchronise, vous allez voir que le point matériel aussi plus vite. D'accord ? C'est clair. C'est parce qu'on a un solide indéformable et qu'il faut donc fournir de l'énergie pour le faire tourner. D'accord ? Alors ça coûte aussi un petit peu. Il y a un peu plus de frottement également.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

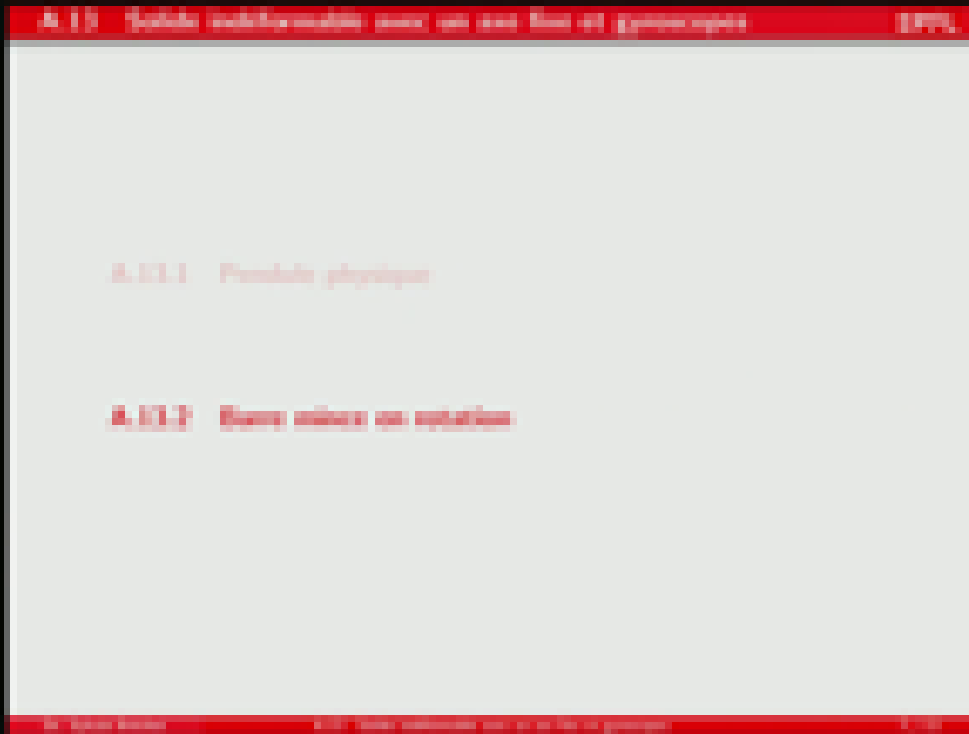
.....

.....

résumé

14m 1s





Mais même en absence de frottement, le point matériel va se déplacer plus rapidement. Sa période d'oscillation sera plus petite. D'accord ? Alors pour montrer où se trouve le sang de masse, on peut évidemment calculer les moments d'inertie, faire un calcul savant qui permet de déterminer mathématiquement la position exacte du sang de masse. Il y a une méthode beaucoup plus simple qu'on peut employer pour arriver au même résultat. Vous voyez ? Si c'est pas le sang de masse autour duquel aussi l'objet, automatiquement dû au moment de force lié à son propre poids, il va se mettre à osciller. On peut prendre un autre point. Ça sera le même effet. On pourrait choisir le point qui est là. Ça sera pareil. Il aussi. Et maintenant si on s'approche, on n'est pas encore... Ça, ce n'est pas le sang de masse. Mais on s'approche. Vous voyez que le moment de force lié au poids est beaucoup plus faible. Le sang de masse est temps. En fait, je crois le point qui est ici. Ah non, je me suis trompé. Attends, attends. Non, c'était bien celui-là. Temps pour moi. Voilà, vous voyez ? Je peux le mettre dans un peu près n'importe quelle configuration. Comme c'est le poids qui génère le moment de force qui le permet de le faire osciller, si j'ai pris l'axe au niveau du sang de masse, l'objet reste dans sa position, il ne nous dit plus. C'est donc le sang de masse. Maintenant qu'on a compris que le point qui est ici représente le sang de masse, on voit donc, comprenant notre pendule mathématique, on a bien comparé ces mouvements d'oscillation avec un pendule mathématique dont la masse se trouve au même sang de masse. D'accord ? Voilà.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

- Une barre indéformable et homogène de masse M , de longueur L et d'épaisseur négligeable est fixée à l'axe de son extrémité au point O . L'orientation de la barre fait un angle θ = entre avec l'axe vertical passant par l'origine O .
- La barre est en rotation sans frottement à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{k}$ = autour de l'axe vertical.
- Soit $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre.
- Le moment d'inertie de la barre rapporté à l'axe principal d'inertie radial Ox est négligeable, i.e. $I_{Oxx} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie radial Ox et axial Oz sont égaux :

$$I_{Oxx} = I_{Ozz} = I_O =$$

(A.13.10)



Prenons un problème un tout petit peu plus compliqué maintenant. Celui d'une barre mince en rotation, c'est-à-dire la version du solide indéformable d'un pendule conique. D'accord ? Donc vous avez une petite barre qui est ici, on va supposer qu'elle est très fine. D'accord ? Et on la met en rotation autour d'un point fixe qui est ici, sur un axe vertical. Disons qu'on la met en rotation au vu d'avion, dans le sens trigonométrique, ce qui veut dire que le vecteur vitesse angulaire est orienté verticalement vers le haut. Clairement, le vecteur vitesse angulaire n'est pas orienté selon un axe principal d'inertie de la barre, parce que ces axes, c'est l'axe de la barre, et deux autres axes qui sont dans le plan qui est orthogonal à cet axe. D'accord ? Alors on va prendre un repère d'inertie, on prend un repère d'inertie, disons sphérique, avec un vecteur unitaire au chapeau le long de la barre vers le bas, un vecteur tête à chapeau, orthogonal à la barre,

notes

résumé

17m 36s



A13 - Barre solide en rotation
1770

- Vitesse angulaire :

$$\vec{\Omega} = \dots \quad (A.13.10)$$
- Forces extérieures :
 - Poids : en G

$$\vec{P} = M\vec{g} = \dots \quad (A.13.11)$$
 - Tension : en O

$$\vec{T} = \dots \quad (A.13.12)$$
- Accélération du centre de masse : centrifuge

$$\vec{A}_G = \dots \quad (A.13.13)$$



Dr. Jacques Bouchard
A.13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
4 / 30

dans le plan vertical, radial orienté vers le haut, long de tête à éris, d'accord ? Et puis, si on fait le produit vectoriel des deux, on aura un vecteur qui rentre dans le plan, vu en perspective, qui est donc orienté dans le sens d'une rotation qui aurait lieu, non ce n'est pas le cas ici, dans le sens opposé, mais il est orienté dans le sens aigu du monde, il rentre dans le plan, ok ? Et la première chose à faire, c'est d'écrire les moments d'inertie de notre barre par rapport aux axes principaux d'inertie. Alors, le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie de la barre, celui-ci, on peut considérer qu'il est quasiment nul, puisque la barre est très fine, donc les points matériels qui constituent certaines barres sont quasiment le long de l'axe de la barre, d'accord ? Donc IGR est négligeable, on considère qu'il est nul. En ce qui concerne les moments d'inertie par rapport aux axes qui sont orthogonaux à la barre, c'est-à-dire l'axe principal d'inertie G t'est à chapeau qui est ici, ou l'axe principal d'inertie G fit chapeau qui rentre dans le plan, selon ces deux axes-là, on a calculé le moment d'inertie de la barre main ce matin, il s'agit d'un douzième de la masse de la barre fois sa longueur au carré. Bon, alors l'étape suivante,

notes

résumé

18m 37s



A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
EPFL

- Vitesse angulaire :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_3 = \dot{\theta} (\cos\theta \vec{e}_2 + \sin\theta \vec{e}_3) \quad (A.13.10)$$
- Forces extérieures :
 - Poids : en O

$$\vec{P} = Mg = -Mg \vec{e}_3 \quad (A.13.11)$$

$$= -Mg (\cos\theta \vec{e}_2 + \sin\theta \vec{e}_3)$$
 - Tension : en O

$$\vec{T} = T (\cos\alpha \vec{e}_2 + \sin\alpha \vec{e}_3) \quad (A.13.12)$$

$$= T (\cos\alpha (\cos\theta \vec{e}_2 + \sin\theta \vec{e}_3) + \sin\alpha \vec{e}_3)$$
- Accélération du centre de masse : centrifuge

$$\vec{A}_G = -\dot{\theta}^2 R \vec{e}_3 \quad (A.13.13)$$



Dr. Jérôme Brédas
A.13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
4 / 20

ça va être tout d'abord d'écrire le vecteur vitesse angulaire dans le repère d'inertie, donc le vecteur vitesse angulaire, c'est sa norme omega fois le vecteur unitaire Z chapeau qui est orienté vers le haut, Z chapeau, on peut le réexprimer encore donné sphérique en termes de combinaison linéaire des vecteurs unitaires, on va se retrouver avec moins le cosinus de l'angtheta fois R chapeau, plus le sineus de l'angtheta fois theta chapeau. Alors maintenant, on aura besoin de projeter les deux forces qui vont s'appliquer sur la barre, ces forces, c'est le poids, appliqué au centre de masse, et l'attention qui ne va pas être orientée le long de la barre. Et là, on va montrer qu'effectivement, elle n'est pas orientée le long de la barre, alors pour le montrer, on ne va pas appliquer le théorème du moment cinétique au niveau du point fixe, qui est le point haut, qui serait la manière la plus efficace de résoudre ce problème. Mais pour comprendre comment est orientée l'attention, volontairement, on va appliquer simultanément le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique au niveau du centre de masse. Alors on va prendre le poids et le poids, on va d'abord l'exprimer encore donné cylindrique avec le vecteur unitaire Z chapeau qui est orienté vers le haut et au chapeau qui est radialement orienté vers l'extérieur. Donc pour le poids, on va se retrouver avec moins MG fois Z chapeau. On va ensuite, puisqu'on en aura besoin également, projeter le poids dans le repère sphérique. Alors pour le repère sphérique, on aura MG qui multiplie le cossinus de theta R chapeau moins le sinus de theta fois theta chapeau. Alors faisons pareil maintenant pour l'attention. L'attention qui n'est pas orientée le long de la barre. L'attention qui fait un angle alpha avec l'axe vertical, alpha étant différent de theta. Donc pour projeter l'attention le long de la

notes

résumé

19m 55s



A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
17/27

- Vitesse angulaire :

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k} = \Omega (\hat{z} \cos \theta + \sin \theta \hat{r}) \quad (A.13.10)$$
- Forces extérieures :
 - Poids : en G

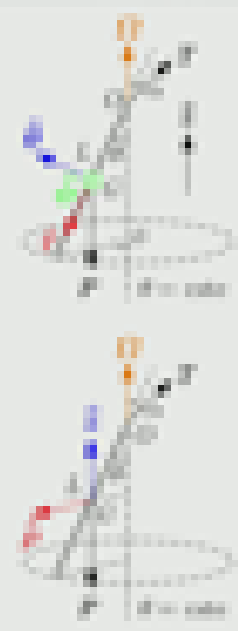
$$\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\hat{z} \quad (A.13.11)$$

$$= -Mg(\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{z})$$
 - Tension : en G

$$\vec{T} = T(\hat{r} \cos \alpha \hat{r} + \sin \alpha \hat{z}) \quad (A.13.12)$$

$$= T(\cos \alpha (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{z}) + \sin \alpha \hat{z})$$
- Accélération du centre de masse : centrifuge

$$\vec{A}_G = -\frac{v^2}{R} \hat{r} = -\Omega^2 R \hat{r} \quad (A.13.13)$$



A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
17/27

barre, il faudra faire intervenir l'angle qui est la différence des deux qui apparaît ici, qui est alpha moins theta. Alors faisons d'abord la projection encore donnée cylindrique. On va alors se retrouver avec T moins le sinus de alpha fois au chapeau plus le cosinus de alpha fois Z chapeau. Et c'est lorsqu'on projette encore donné sphérique que c'est légèrement plus compliqué. C'est mointer fois le cosinus de alpha moins theta fois R chapeau plus le sinus de alpha moins theta fois theta chapeau. La barre tourne à vitesse angulaire constante. L'angle d'inquiésion de la barre est fixe, ce qui veut dire que la distance qui sépare l'axe vertical du centre de masse est constante. C'est la projection de la moitié de la barre sur le segment horizontal qui est ici. Donc celle sur deux sinus de theta qui plus est la vitesse angulaire de rotation et fixe. On a évidemment une accélération sans tripette. Cette accélération sans tripette, c'est le rayon soit L sur deux fois le sinus de theta multiplié par le carré de la vitesse angulaire qui est omega. On aura donc un omega carré, le toutefois R chapeau.

notes

résumé

A13] Solide indéformable en rotation

EPFL

■ Théorème du centre de masse :

$$\sum \vec{r}^{ext} = 0$$

(A.13.16)

selon $\vec{p}$:

selon $\vec{R}$:

■ Composantes de la tension :

(A.13.16)

(A.13.17)

■ Orientation de la tension : (A.13.16) / (A.13.17)

tension $\vec{t}$

(A.13.18)

L'accélération sans tripette est radialement orientée vers l'intérieur. Au chapeau est orientée vers l'extérieur, d'où le sin moins qu'on retrouve ici.

notes

résumé

23m 13s

page 18/27 - A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

A13

Barre solide en rotation

EPFL

■ Moment cinétique :

$$\vec{L}_G =$$

$$=$$

(4.13.78)

■ Formule de Poisson :

$$\vec{P} = \vec{\Omega} \times \vec{P} =$$

$$=$$

(4.13.79)

■ Dérivée temporelle du moment cinétique :

$$\dot{\vec{L}}_G =$$

(4.13.78)

■ Moment des forces extérieures : tension en O

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_G^{(i)} =$$

$$=$$

(4.13.79)

Dr. Sylvain Bréchet

A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

24 / 30

en train de dire, c'est que si vous prenez un omega au hasard, d'accord ? Un omega quelconque, eh bien ceci est différent, clairement différent de la tangente de theta. Ce qui démontre que l'angle alpha pour la barre est différent de l'angle theta, donc la tension n'est pas orientée en général le long de la barre. Parce que la barre brise la symétrie de rotation, ce qui n'est pas le cas d'un point matériel. D'accord ? Donc c'est un très joli résultat, ça valait la peine de l'établir. Continuons. On aimerait maintenant appliquer le théorème du moment cinétique au niveau du centre de masse.

notes

résumé

A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
1779

- Moment cinétique : $\vec{L}_G = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$

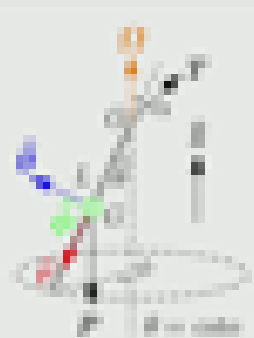
$$L_G = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_x + \sum_i m_i (x_i z_i - y_i z_i) \omega_y + \sum_i m_i (y_i z_i - x_i z_i) \omega_z$$

$$= I_{xx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$
- Formule de Poisson :

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{e}_1 + \dot{\beta} \vec{e}_2 + \dot{\gamma} \vec{e}_3$$
- Dérivée temporelle du moment cinétique :

$$\dot{\vec{L}}_G =$$
- Moment des forces extérieures : notation en $\vec{C}$

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{C}) =$$



Dr. Jacques Bessière
A13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
1779

D'accord ? Donc on a le tenseur d'inertie qui apparaît. Ce n'est pas juste un moment d'inertie. Mais ce qu'on sait, bien heureusement, c'est qu'on va pouvoir exprimer le moment cinétique dans le repère d'inertie et là, on connaît sa structure, c'est le produit des moments d'inertie. Il faut aller composant du vecteur vitesse angulaire fois les vecteurs unitaires correspondants dans le repère. Le repère étant ici un repère sphérique. On aura donc IGR fois Mégahère fois Hérchapo, plus IJ teta fois Mégateta fois Tétachapo, plus IJ-FI fois Mégafi fois Fichapo. Attention, IGR est négligeable, d'accord ? Puisque la barre est tellement fine que ce moment d'inertie peut être considéré comme nul. IGR teta on l'a appelé IGR. IGR teta est égale à IGR-FI qui vaut IGR pour notre barre, d'accord ? Bon. Dans notre problème, omega teta, si on regarde la structure du vecteur vitesse angulaire omega omega teta donc est égale à omega sinus teta. Et si vous reprenez le vecteur vitesse angulaire omega, je vais juste faire un friseau de cet écran, le voici, d'accord ? Oui, donc voilà. Vous voyez que dans l'équation A13-11 vous n'avez aucune composante selon FI, il n'y a aucune composante horizontale, d'accord ? Donc omega FI est nul. Très bien. Omega FI est égale à zéro. Donc il y a un seul terme intéressant, c'est celui-ci, c'est le seul terme non nul dans le cas spécifique du problème qui nous intéresse ici.

notes

résumé

26m 14s



A13

Barre solide en rotation

1779

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \mathbf{M}_G^{\mathbf{F}_i} = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

avec $\mathbf{I}_G$:

- Formule de réciprocité :

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_G^T$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

- Théorème du centre de masse : (A.13.18) - $\mathbf{I}_G$ et (A.13.19) - $\mathbf{I}_G$

On va donc se retrouver avec $\mathbf{I}_G$, $\boldsymbol{\omega}$ sinus θ fois $\dot{\theta}$ chapeau, ok ? Alors pour aller plus loin, il faudra dériver par rapport au temps $\mathbf{I}_G$. Donc il faut appliquer les formules de poisson. La dérivée temporelle du vecteur $\dot{\theta}$ chapeau c'est le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire avec le vecteur $\dot{\theta}$ chapeau. Le vecteur vitesse angulaire, on le connaît. C'est cet $\boldsymbol{\omega}$ qui multiplie moins le cas sinus θ fois r chapeau plus le sinus θ fois $\dot{\theta}$ chapeau produit vectoriel avec $\dot{\theta}$ chapeau. La contribution au $\dot{\theta}$ chapeau n'apporte aucun terme significatif au produit vectoriel. En revanche, si on prend le premier terme, on a le produit vectoriel de r chapeau avec $\dot{\theta}$ chapeau. Produit vectoriel des deux premiers vecteurs du repère sphérique dans l'ordre, ça donne le troisième. Il y avait un 6 le moins qui reste. On a donc un moins $\boldsymbol{\omega}$ cos sinus θ fois r chapeau. Maintenant, la dérivée temporelle du moment signétique évalué au centre de masse c'est le moment d'inertie multiplié par $\boldsymbol{\omega}$ multiplié par le sinus de θ fois la dérivée temporelle du vecteur $\dot{\theta}$ chapeau. On vient de la déterminer, on substitue, on a moins $\mathbf{I}_G$, fois $\boldsymbol{\omega}$ carré, fois le sinus de θ fois le cosinus du même θ fois r chapeau. Maintenant qu'on a déterminé la dérivée temporelle du moment signétique, on peut calculer la somme des moments de force. Quels sont les forces qui apparaissent ? Le poids et la tension. Le poids est appliqué au centre de masse. Donc son moment de force évalué au centre de masse est nul. Le moment de force de la tension, on l'obtient en multipliant le vecteur $\mathbf{GO}$ avec la tension T . Le vecteur $\mathbf{GO}$, c'est un vecteur qui part du centre de masse qui pointe sur l'origine, dont la norme correspond à la moitié de la longueur de la barre, qui orientait dans

notes

résumé

28m 1s



A13

Barre solide en rotation

1779

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_{G_i}^{ext} = \dot{L}_G \quad (A.13.10)$$

avec $\dot{\phi}$:

- Formule de réciprocité :

$$(A.13.11)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.13.12)$$

- Théorème du centre de masse : (A.13.13) - $\dot{L}$ et (A.13.14) - $\dot{L}$

$$(A.13.15)$$

et

$$(A.13.16)$$

Dr. Sylvain Bruneau

A13 : Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

24 / 27

la direction opposée à re chapeau. On aura donc moins L sur 2 fois R chapeau, dont on prend le pro du vectoriel avec la tension, qui est moitié, qui multiplie. Le cosineus de alpha moins theta fois R chapeau plus le sinus de alpha moins theta fois theta chapeau. Le terme radial de la tension apporte aucune contribution au pro du vectoriel. Il reste uniquement le terme nodal. Le pro du vectoriel de R chapeau avec theta chapeau, comme tout à l'heure, ça donne phi chapeau. Laissez-moi se simplifier. Il va donc nous rester une demi de T I, rien à voir avec les transports publics du même nom, fois le sinus de alpha moins theta le tout fois phi chapeau. Si on applique maintenant

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

Diagram illustrating a gyroscope setup. A vertical axis is shown with a horizontal frame attached. The frame is labeled with coordinates (x, y, z) and (X, Y, Z) . The gyroscope is shown in a state of rotation.

A.13.2 Gyroscopes : solide indéformable

- Equation du mouvement : $(A.13.27) / \sin \theta$ (A.13.28)
- Orientation de la barre : $\cos \theta = \dots$ (A.13.29)
- Angle de rotation : $\dot{\phi} = \frac{1}{I_2} M \dot{\phi}^2$

$\theta = \dots$

Pour $I_2 = 0$, on retrouve l'angle d'inclinaison vertical θ d'un pendule conique de masse M , de longueur $L/2$ tournant à vitesse angulaire $\dot{\phi}$.

cosinus de quoi ? contenu du moment d'inertie qui voit un 12ème de ml carré la première fraction se réduit au 3 quart tout simplement c'est les 3 quart de quoi ? $2g$ sur l sur 2 omega carré regardez bien cette 2ème fraction on est en train de parler d'un pendule on a quoi ? on a le rapport pour l'angle d'inclinaison on a le rapport de g sur l'accélération sans tripette l'accélération sans tripette du centre de masse et comme on a un solide indéformable que ce n'est pas un point matériel il y a un facteur correctif qui tient compte du moment d'inertie ce facteur correctif nous donne ici les 3 quarts au lieu d'avoir un facteur donc vous voyez que c'est parfaitement cohérent en termes de physique donc on a un problème de pendule conique qui ressemble au problème de pendule conique qu'on avait pour un point matériel il y a un point intense donc je propose qu'on s'arrête ici et puis j'en profite puisqu'il nous reste un peu plus de 5 minutes il y a-t-il des questions ? s'il n'y a pas de questions vous pouvez certainement me les poser après ceux qui ont des questions spécifiques n'hésitez pas à venir et je vous souhaite une excellente fin de journée

notes

résumé